◆　Appendix　リスク中立測度とブラックショールズの公式

　このAppendixでは、市場が無裁定であることを仮定したときにオプションの価値を与えるリスク中立測度が、原資産過程およびリスクフリーの資産から定義されること、また、そのリスク中立測度の下で原資産過程がマルチンゲール性を満たすことを確認します。さらに、それらの概念を用いてオプションの価値を与えるブラックショールズの公式についての簡単な証明を与えます。厳密性を欠く部分が有るかもしれませんが、直観的な理解を優先させるためであるとご理解いただければ幸いです。

1.　無裁定

　ブラックショールズ・モデルを考えようとする場合は、市場が無裁定であることが前提となります。無裁定の概念を定義するためには、セルフファイナンシングおよび裁定取引の概念を導入する必要があります。以下、これらの定義を述べます。

- 定義

➢　セルフファイナンシング

株式およびリスクフリーの資産からなるポートフォリオ（の時系列）がセルフファイナンシングであるとは、各時点において以下の条件を満たすように組み替えが行われることである。

$$\theta_t S_{t+1} + \eta_t B_{t+1} = \theta_{t+1} S_{t+1} + \eta_{t+1} B_{t+1}$$

ここで、S_tとB_tはそれぞれ、株式とリスクフリー資産の時刻t時点の価格を表し、θ_tとη_tは、株式の保有量およびリスクフリー資産の保有量を表す。

➢　裁定取引

あるセルフファイナンシングであるポートフォリオ（の時系列）V_tが裁定取引であるとは、以下の条件を満たすことをいう。

$$V_0 = 0$$
$$\Pr(V_t \geq 0) = 1$$
$$\Pr(V_t > 0) > 0$$

　市場に裁定取引が存在しないとき、ある金融商品のキャッシュフローを何らかのセルフファイナンシングのポートフォリオによって複製できた場合は、金融商品の価値はそのポートフォリオの現在価値と一致することになります。もし、仮に一致していなかった場合は、価格が高いほうを空売りして、その資金で価格が低いほうを購入すればペイオフが完全に一致するため「元手が0の状態から得られる利益」が（確率1で）0よりも大きくなります。これは、裁定取引がないという前提に矛盾します。以下の議論では、市場に裁定取引は存在しないものと仮定します。

さて、オプションの価格を求めるためのリスク中立測度がどのように導出されるかを考えます。市場に裁定取引は存在しないとし、簡単のため、離散的な時刻 t=0,1,2 について考えることとして、以下のセットアップを仮定します。(時刻 t が一般の n までの値をとる場合も同様の議論が成り立ちます。)

セットアップ

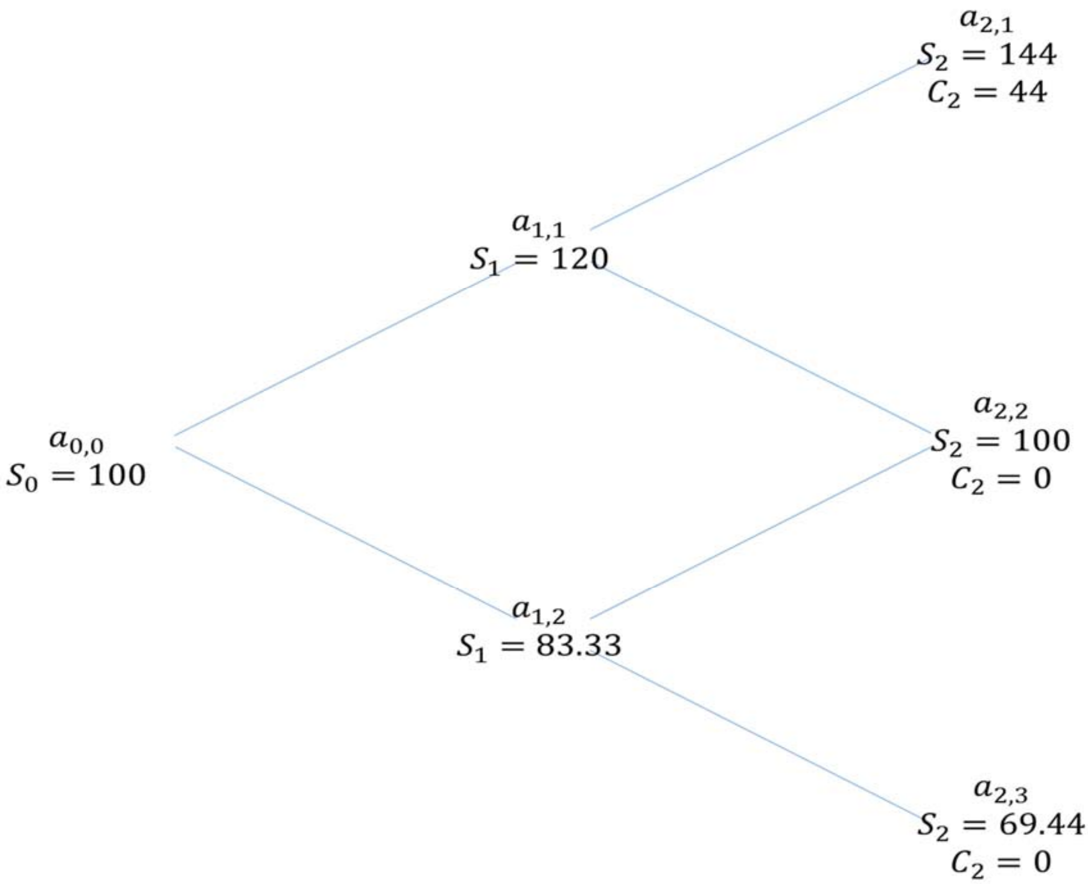
- 株価：$\{S_{\mathrm{t}}\}_{t=0,1,2}$

  S_{t}は確率変動するものとし、S_0 ＝100 円、$S_{\mathrm{t}} = S_{\mathrm{t-1}} \times e^{\sigma}$ もしくは、$S_{\mathrm{t}} = S_{\mathrm{t-1}} \times e^{-\sigma}$であるとし、また$e^{\sigma} = 1.2$とします。(ただし、どの程度の確率でそれぞれの価格に推移するかは何も仮定しないこととします。)
- リスクフリー資産の価格：$\{B_{\mathrm{t}}\}_{t=0,1,2}$

  将来の価格が約定された利回りで利殖されていく資産のことで利率を 2%とします。つまり、$e^{r} = 1.02$とすれば、$B_{\mathrm{t}} = B_{\mathrm{t-1}} \times e^{r}$となります。また、$B_0 = 100$とします。
- コールオプション：$\{C_{\mathrm{t}}\}_{t=0,1,2}$

  株式を原資産とするヨーロピアン型のコールオプションで行使価格を 100 円、オプションの期間を 2 とします。(つまり、時刻 2 のときに株価が 100 円を上回っていた場合はオプションを行使して 100 円で株を購入して即時に売却することで、差額分の利益を得ることができます。)

以上のセットアップのもと、コールオプションの価値を各時点$t = 0,1,2$で求めることを考えます。オプション価値は原資産である株式の価格に連動して以下の樹形図における格子点ごとに求められます。(各格子点についてそれぞれ$a_{i,j}$と番号を付けることとします。)



このとき、前段の議論で見たように、オプション価値はそのペイオフを復元するようなポートフォリオの価格と一致することになります。

満期時点では各格子点の株価が決定しているため、オプション価値は以下の算式により与えられます。

$$C_2 = \max(S_2 - 100, 0)$$

また、無裁定の仮定より満期時点のペイオフを復元するようなポートフォリオを求めることがオプションの評価をすることに相当するため、$C_2 = \theta_2 S_2 + \eta_2 B_2$となり、$a_{1,1}$において以下の連立方程式が成立します。

$$\begin{cases} 144\theta_2 + 100 \times 1.02^2 \eta_2 = 44 \\ 100\theta_2 + 100 \times 1.02^2 \eta_2 = 0 \end{cases}$$

これを解けば、$(\theta_2, \eta_2) = (1, -0.961)$であることがわかります。すなわち、株式を 1 単位ロングポジションで持ち、リスクフリーの資産を 0.961 単位ショートポジションで持つことによってペイオフが復元されることになり、$a_{1,1}$におけるオプション価値は$120\theta_2 + 100 \times 1.02\eta_2 = 21.96$となることが分かります。同様にして$a_{1,2}$におけるオプション価値は 0 となり、$a_{0,0}$におけるオプション価値を求めるためには、以下の連立方程式を解けばよいことが

分かります。

$$\begin{cases} 120\theta_1 + 100 \times 1.02\eta_1 = 21.96 \\ 83.3\theta_1 + 100 \times 1.02\eta_1 = 0 \end{cases}$$

上式より、$(\theta_1, \eta_1) = (0.599, -0.489)$が導かれ、$a_{0,0}$におけるオプション価値は$100\theta_1 + 100\eta_1 = 10.96$となることが分かります。

2.　リスク中立測度とマルチンゲール

以上、オプション価値は無裁定の仮定の下では、そのペイオフを復元するポートフォリオを構築することによって評価できることを確認しました。さて、このようにして求められたオプション価値を何らかの確率測度に基づいた期待値の割引現在価値として表現することを考えます。$a_{0,0}$において将来株式が上昇する確率を p とおくと、以下が成り立ちます。

$$\frac{\{\mathrm{p} \times 21.96 + (1-\mathrm{p}) \times 0\}}{1.02} = 10.96$$

これを解けば、p = 0.509 となることが分かります。同じ議論を各格子点に適用すれば、全ての格子点で株式の上昇確率が p = 0.509 となることも分かります。このようにして求められた確率測度は**リスク中立測度**と呼ばれており、

$$100 = \frac{\{120 \times p + 83.33 \times (1-p)\}}{1.02}$$

$$120 = \frac{\{144 \times p + 120 \times (1-p)\}}{1.02}$$

などが成立することから、「**各格子点上の原資産価格は将来の原資産価格の期待値の割引現在価値となっている**」ことも分かります。

より一般に、この事実を以下のように表記します。

$$S_t = \mathrm{E}[e^{-r} S_{t+1} | F_t]$$

F_tは、フィルトレーションと呼ばれるもので、時刻 t までに得られる情報の集まりを表します。（今回の場合は時刻 t までの原資産価格の情報の集まりを表していると考えて差し支えありません。）また、$\mathrm{E}[\cdot]$と表現した場合には、リスク中立測度の下での期待値を表すこととします。

上式は、時刻 t までによって得られた情報の下での将来の（リスク中立測度の下での）期待値が現時点のポジション（の割引現在価値）に一致することを意味しており、この性質を**マルチンゲール**と呼びます。

3.　連続時間モデル

以上、離散的なモデルについて以下の重要な結果が得られました。

①　市場が無裁定であるという仮定の下で、複製ポートフォリオによってプライシングさ

れたオプションの価値はリスク中立測度の下でのペイオフの期待値と一致する。

② 原資産過程（の割引現在価値）は、リスク中立測度の下ではマルチンゲール性を満たす。

③ オプションの価値が、リスク中立測度の下でのペイオフの期待値の割引現在価値に一致する。

次にこれを連続時間に拡張することを考えます。このために次の二つの定理を用います。

- **中心極限定理**

期待値μと分散σ^2を持つ独立同一分布に従う確率変数列$\{X_i\}_{i=1,2,\ldots}$に対して$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$とおくと、以下が成り立つ。（ここで、$N(0,1)$は平均 0 分散 1 の正規分布を表す。）

$$(S_n - n\mu)\Big/\sqrt{n}\sigma \;\rightarrow\; N(0,1) \quad as\; n \rightarrow \infty$$

- **伊藤の公式**

$f(\mathrm{x},\mathrm{t})$を二階微分可能な関数、W_tを標準ブラウン運動[1]とすると、以下の等式が成り立つ[2]。

$$f(W_t,\mathrm{t}) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(W_s,\mathrm{s})\, dW_s \;+\; \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} f(W_s,\mathrm{s}) ds +\; \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(W_s,\mathrm{s})\, ds$$

これらを用いてブラックショールズの公式として知られるオプションの評価式の概略について述べます。今、独立同一分布に従う$\{X_i\}_{i=1,2,\ldots}$を仮定して、改めて$S_{\mathrm{kt/n}} = S_{\mathrm{t(k-1)/n}} \times e^{X_k/\sqrt{n}}$とおきます[3]。また、$\mathrm{E}[X_i] = \mu t/\sqrt{n},\ \mathrm{V}[X_i] = \sigma^2 t$とおきます[4]。

連続時間の挙動を考えるためには$\mathrm{n} \rightarrow \infty$とした時の極限の分布を調べることになりますが、

$$S_{\mathrm{t}} \;=\; S_0 \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{\sqrt{n}}\right)$$

であるため中心極限定理により、

---

[1]標準ブラウン運動は、次の三つの性質によって定義付けられます。

- 独立増分性：$s \le t$であるときB_sと$B_t - B_s$は独立
- 連続性：$\lim_{s\to t} W_s = W_t$
- 時刻 t における分布が N(0,t)に従う

[2]第一項は確率積分と呼ばれるものでこれ自体がマルチンゲールになります。本稿では詳細については割愛しますが、第一項がマルチンゲールになるという事実を用います。また、第二項以下は一般的な意味での積分を表しますが、本稿ではこの部分を**有界変動部分**と呼ぶこととします。

[3]X_iはnに依存するため、$X_i^{(n)}$等と本来は書くべきですが、ここでは簡単のためX_iと表記します。

[4]これは、原資産過程の単位時間当たりの上昇率の平均および分散がμ, σ^2であることを意味します。

$$S_{\mathrm{t}} \to S_0 \exp(\sigma W_t + \mu t) \quad (\mathrm{n} \to \infty)$$

となることがわかります。ここで、W_tは標準ブラウン運動を表します。（すなわち、原資産過程は対数正規分布になります。）

前段の議論から、「リスク中立測度の下で、原資産過程の割引現在価値はマルチンゲール性を満たす」ため、$e^{-rt}S_{\mathrm{t}} = S_0 \exp(\sigma W_t + (\mu - r)t)$はマルチンゲールになる必要があります。ここで、右辺を伊藤の公式を用いて書き換えてみると、

$$e^{-rt}S_{\mathrm{t}} = S_0 \int_0^t \sigma \cdot \exp(\sigma W_s + (\mu - r)s)\, dW_s + \int_0^t (\mu - r) \cdot \exp(\sigma W_s + (\mu - r)s) ds$$

$$+ \int_0^t \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot exp(\sigma W_s + (\mu - r)s)) ds$$

となります。

右辺がマルチンゲールであるためには有界変動部分が 0 となる必要があり、以下の等式が成立します。

$$\mu - r = -\frac{\sigma^2}{2}$$

つまり、リスク中立測度の下ではブラウン運動の中心を与える$\mu - r$がボラティリティσによって特徴付けられ、結果的に原資産過程の割引現在価値は、（天下り式に）ボラティリティのみのシングルパラメータになります。

このようにして導かれた原資産過程がブラックショールズ・モデルと呼ばれるものに相当し、原資産過程は以下のように記述されます。

$$S_{\mathrm{t}} = S_0 \exp\left\{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t + rt\right\}$$

また、「**オプションの価値がペイオフの期待値の割引現在価値に一致する**」ことから、次のようにしてコールオプションの価値が求まります。

$$\text{コールオプションの現在価値}: C_{\mathrm{t}} = \text{ペイオフの期待値の割引現在価値} = e^{-rt}\mathrm{E}[(S_{\mathrm{t}} - K)_+]$$

$$= \int_{\left\{\omega | S_0 exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t + rt\right) - K \geq 0\right\}} e^{-rt}\left\{S_0 exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t + rt\right) - K\right\} dP$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\left\{S_0 exp\left(\sigma\sqrt{t}x - \frac{\sigma^2}{2}t + rt\right) - K \geq 0\right\}} \left\{S_0 exp\left(\sigma\sqrt{t}x - \frac{\sigma^2}{2}t\right) - Kexp(-rt)\right\} exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$= S_0 N(d_1) - \mathrm{K}\mathrm{e}^{-rt} N(d_2)$$

ここで、

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$
$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

これはブラックショールズの公式として知られています。

プットオプションについても同様にペイオフの期待値の割引現在価値を計算すれば良く、以下の公式が成り立ちます。

$$\textit{プットオプションの現在価値：} P_{\mathrm{t}} = e^{-rt}\mathrm{E}[(K - S_{\mathrm{t}})_+]$$
$$= -S_0 N(-d_1) + K\mathrm{e}^{-rt} N(-d_2)$$

まとめ

本 Appendix で述べた重要な性質をまとめると次の通りとなります。

- デリバティブの価格は、市場が無裁定であるという仮定の下、複製ポートフォリオの価値として求められる。
- 上記の価格は、リスク中立測度の下でのオプションペイオフの期待値の割引現在価値と一致する。
- ブラックショールズ・モデルは二項モデルの極限として得られる。